"TISU ilmiy tadqiqotlari xabarnomasi" ilmiy-uslubiy jurnali
https://lib.tisu.uz
ISSN 0000-0000

Saatmurotov Shohrux Zafar o'g'li,
Termiz davlat universiteti Algebra va geometriya kafedrasi o'qituvchisi
E-mail: shohruxz1995@gmail.com

TUB SONLAR ISHTIROK ETGAN BA'ZI BIR ADDITIV MASALALAR HAQIDA

Annotatsiya. Maqolada tub sonlar mavjud bo'lgan oraliqlar masalasi qaralgan. Shu sohada olingan natijalar keltirilgan. Binomial koeffisiyentlardan foydalanib Bertran postulatining nisbatan sodda isboti keltirilgan.

Kalit so'zlar: *Sonli ketma-ketlik, tub sonlar, binomial koeffisiyentlar, ifodalash, Riman gipotezasi, dzeta funksiyaning no'llari, tub sonlar mavjud bo'lgan oraliqlar.*

ПО НЕКОТОРЫМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ВОПРОСАМ, СВЯЗАННЫМ С НОМЕРАМИ ВАНЕЙ

Аннотация. *Нашла в статье числа есть был интервалы проблема просмотрено. Вот и все в поле полученный Результаты данный. Из биномиальных коэффициентов с использованием Бертран постулата относительно простой доказательство данный.*

Ключевые слова: *число последовательность, простые числа, биномиальные коэффициенты, выражение, Риман гипотеза, дзета функции нули, простые числа есть был интервалы.*

ON SOME ADDITIVE ISSUES INVOLVING PRIME NUMBERS

Annotation: *Found in the article numbers there is has been intervals issue viewed. That's it in the field received results given. From binomial coefficients using Bertrand of the postulate relatively simple proof given.*

Key words: *Num sequence, prime numbers, binomial coefficients, expression, Riemann hypothesis, dzeta of the function zeros, prime numbers there is has been intervals.*

Tub sonlarni saqlovchi oraliqlar masalasida ko'p sonli tekshirishlardan so'ng 1845 yilda Bertran [1] agar bo'lsa, interval kamida birta tub sonni o'zida saqlaydi degan taxminni e'lon qilganidan keyin muhim ahamiyat kasb eta boshladi.

Hozirgi vaqtga kelib bo'lganda interval hech bo'lmasa birorta tup sonni o'zida saqlaydi degan mulohaza mavjud [2]. Agar Rimanning umumlashgan gipotezasi o'rinli bo'lsa intervalning hech bo'lmasa birorta tub sonni saqlashi ko'rsatilgan. Bu yerda yetarlicha katta effektiv hisoblanadigan konstanta bo'lib, yetarlicha katta

Bu yerda qo'shiluvchi o yoki 1 ga teng bo'ladi

son. Shenfeld teoremasidan kelib chiqadiki, agar Rimanning umumlashgan gipotezasi o'rinli bo'lib bo'lsa, u holda interval hech bo'lmasa birorta tub sonni o'zida saqlaydi degan tasqiq kelib chiqadi. Bu hozircha tahmin qilinayotgan va barcha sonlar uchun interval kamida bitta tub sonni o'zida saqlaydi degan natijadan ancha uzoq.1976 yilga kelib quyidagi teorema isbotlandi: agar 2 010 760 bo'lsa, u holda interval kamida bitta tub sonni saqlaydi. 2002 yilda quyidagi teorema isbotlandi: agar bo'lsa, u holda interval kamida bitta tub sonni saqlaydi. Keyinchalik 2002 yilda agar

bo'lsa, u holda interval kamida bitta tub sonni saqlashi isbotlandi. 2004 yilda agar bo'lsa u holda

interval kamida bitta tub sonni saqlaydi lekin bu shartli natija, chunki uning isbotida Rimanning gipotezasi o'rinli deb foydalanilgan.

2016 yilda agar bo'lsa u holda interval kamida bitta tub sonni saqlaydi degan shartli natija isbotlandi.

2019 yilda quyidagi teorema isbotlandi: agar bo'lib Rimanning gipotezasi o'rinli bo'lsa u holda oraliq kamida bitta tub sonni o'zida saqlaydi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki bu keltirilgan natijalarning ko'pchiligi shartli natijalardir.

Biz quyida Bertran gipotezasining Erdiyosh tomonidan berilgan isbotini aniqlashtirilgan holda keltiramiz.

Bu postulatni fransuz matematigi bertran Bertran gipoteza sifatida 1845-yilda aytib o'tgan. Uning o'zi gipotezani to'g'ri ekanligini n=3000000 qiymatlari uchun tekshirgan. Gipoteza isbotini esa 1852-yilda P.L.Chebeshev tomonidan isbotlangan [1]. 1919-yilda xind matematigi Ramanudjan uning sodda isbotini topdi. Erdiyosh 1930-yilda bu isbotni yana ham soddaroq holga keltiradi. Bertran postulatining umumlashmasi sifatida quyidagi tasdiqni keltirib o'tishimiz mumkin. Agar sonlari orasida k dan katta tub bo'luvchiga ega bo'lgan son mavjud. Bu tasdiq 1892-yilda Silvester tomopnidan isbotlangan. Xususiy holda bo'lganda bu tasdiq Bertran gipotezasini beradi. Tub sonlatr taqsimoti haqidagi teoremadan son uchun shunday topiladiki shartni qanoatlantiruvchi barcha lar uchun munosabatni qanoat-lantiruvchi tub soni mavjud. Agar fikserlangan bo'lsa bu oraliqdagi tub sonlar soni cheksizlikka intiladi [3]. Xususiy holda masalan bo'lsa va sonlari orasida doimo tub son mavjud bo'ladi [4]. Endi Bertran postulate isbotiga o'tamiz. Biz bu yerda yuqorida qayd etgfanimizdek Erdiyosh tomonidan taklif etilgan isbotdan va quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: – ta elementdan tadan tuzilgan gruppalashlar soni, – ning butun qismi, - tub sonlar to'plamini, ni tenglik orqali aniqlaymiz. Bu funksiyani Chebeshevning – funksiyasi deb ataladi.

, shuning uchun ham Agar bu qo'shiluvchi 1 ga teng bo'lsa bo'ladi

Avvalo quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. Barcha lar uchun tengsizlik bajariladi.

Isboti. ixtiyoriy natural son bo'lganda kombinatsiya oraliqdagi barcha tub sonlarga bo'linadi. Haqiqatdan ham, bo'lib, yuqoridagi intervaldagi ixtiyoriy tub son bu kasrning suratini bo'ladi lekin maxraji unga bo'linmaydi. Bu binomial koeffisient shunday barcha tub sonlarga bo'lingani uchun ularning ko'paytmasidan kichik bo'la olmaydi, ya'ni .Bu munosabatning ikkala tomonini logarifmlasak quyidagiga ega bo'lamiz:

Ikkinchi tomondan esa ni quyidagicha yuqoridan baholash mumkin:

Bu oxirgi ikkita tengsizlikdan ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa ga ega bo'lamiz.

Endi lemmani induksiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin.

da da esa larga ega boʻlamiz, ya'ni va da lemma oʻrinli.

Endi faraz qilaylik boʻlsin va toq son boʻlsin. Aniqlik uchun deb olamiz. Bu holda yuqoridagi formuladan quyidagiga ega boʻlamiz:

Endi faraz qilaylik juft son boʻlsin. U holda va 2 dan katta barcha juft sonlar murakkab sonlar boʻlgani uchun qoʻshiluvchi ga kirmaydi, shunday qilib lemma toʻla isbotlandi.

Endi postulatning bevosita isbotiga oʻtamiz. Isbotning asosiy ma'nosi binomial koeffisentni tub koʻpaytuvchilarga ajratishdan iboratdir. Agarda va sonlar orasida tub sonlar mavjud boʻlmasa, bu tub koʻpaytuvchilarning koʻpaytmasi juda ham kichik boʻladi. Biz teoremani teskarisini faraz qilish yoʻli bilan isbotlaymiz. Faraz qilaylik biror butun soni uchun shartni qanoatlantiruvchi p tub soni mavjud boʻlmasin. Agarda boʻlsa, 3,5,7,13,23,43,83,163,317,631,1259 va 2503 yuqoridagi shartni qanoatlantiradi, shuning uchun ham deb olishimiz mumkin. ni baholaymiz.

tenglik oʻrinli. Bu yerda eng katta had uchun quyidagi tengsizlik oʻrinli :

Faraz qilaylik sonini tub koʻpaytuvchilarga yoyilmasi p tub sonining darajasi boʻlsin. U holda deb yozaolamiz. n! sonida boʻlinadigan sonlarning soni butun qismiga teng boʻlgani uchun,

deb yoza olamiz.

Bu yerda qoʻshiluvchi 0 yoki 1 ga teng boʻladi, bu ning

Shunday qilib bizning farazimiz notoʻgʻri oraliqda kamida bitta tub son mavjud boʻlarkan

kasr qismiga bogʻliq agar u dan kichik boʻlsa 0 ga teng, agar dan katta yoki teng boʻlsa 1 ga teng boʻladi. Yuqoridagi formuladan: boʻlgan barcha hadlar 0 ga teng boʻladi, chunki bu holda . Shunday qilib ta qoʻshiluvchi mavjud va bu qoʻshiluvchilarning har biri 0 yoki 1 ga teng. shuning uchun ham . deb ayta olamiz.

Endi baholaymiz. Ihtiyoriy p uchun . Lekin boʻlganda bunga qaraganda ancha aniq formula olish mumkin. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi p lar uchun 1 ga teng boʻlgan qoʻshiluvchilar soni , shuning uchun ham Agar bu qoʻshiluvchi 1 ga teng boʻlsa boʻladi. Agar bu qoʻshiluvchi 0 ga teng boʻlsa boʻladi.

Endi tub boʻluvchilarning qaysi intervalda yotishini aniqlaymiz.

Qaralayotgan soni quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi tub boʻluvchilar ega boʻlamydi:

1. Agar boʻlsa, chunki bu holda bajaradi.
2. boʻlsa, chunki biz bu intervalda tub son mavjud boʻlmasin deb faraz qilgan edik.
3. boʻlsa, chunki bu holda (boʻlib, boʻladi. Demak soni sonidan katta tub boʻluvchilarga ega emas.

Endi sonini tub boʻluvchilari p boʻyicha larning koʻpaytmasini baholaymiz. dan katta boʻlmagan boʻluvchilar uchun bu koʻpaytma, . sonidan katta boʻlaolmaydi, dan katta tub boʻluvchilar uchun esa bu koʻpaytma dan katta emas. soni sonining barcha p lar uchun koʻpaytmasidan iborat boʻlganligi uchun quyidagiga ega boʻlamiz: , yuqorida isbotlagan formulamizdan foydalansak boʻlgani uchun: tengsizlik oʻrinli boʻladi. Endi boʻlganidan: hosil qilamiz. Bundan tashqari boʻlgani uchun: tengsizlik oʻrinli boʻladi. Ikkala tomonni logarifmlab tengsizlikni hosil qilamiz . deb belgilash olsak: tengsizlik oʻrinli ekanligini koʻramiz. Bu esa bizning shartimizga qarama qarshidir chunki . Shunday qilib

Har qanday natural sonni to‘rtta butun son kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin

bizning farazimiz noto‘g‘ri oraliqda kamida bitta tub son mavjud bo‘larkan.

Faraz qilaylik, musbat butun sonlarning o‘suvchi, cheksiz ketma-ketligi

(1)

bo‘lsin. Agar k ta ketma-ketliklar (ularning orasida bir xillari ham bo‘lishi mumkin) berilgan bo‘lsa, elementlari

tenglik bilan aniqlanuvchi ... ketma-ketlikka berilgan ketma-ketliklarning yig‘indisi deb ataladi [5] va ko‘rinishda belgilanadi.

кattalikka ketma-ketlikning zichligi deb ataladi. Bunda (1) ketma- ketlikdagi dan katta bo‘lmagan hadlar sonini bildiradi.

Additiv masalalar deganda berilgan to‘plamning elementlarini to‘plamlar elementlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash tushiniladi.

Bu yerda quyidagi masalalarni hal etish muhim [5] :

1. Agar ketma-ketliklar berilgan bo‘lsa, dagi (2) shartni qanoatlantiruvchi elementlardan tuzilgan ketma-ketlikning zichligi qanday bo‘ladi?

Shunga o‘xshash dagi (2) shartni qanoatlantirmaydigan elementlardan tuzilgan ketma-ketlikning zichligini ham qarash mumkin.

2. va lar berilgan bo‘lganda (2) shartni qanoatlantiruvchi lar sonini bildiruvchi funksiyani tekshirish.

Boshqacha qilib aytganda, funksiya uchun aniq yuqori va quyi chegaralarini topish yoki asimptotik formula keltirib chiqarish.

Bu keltirilgan masalalar: Waring muammosi, Eyler-Goldbax muammosi, Xardi-Littlvud muammosi, Xua-Lo-Ken muammosi va boshqa ko‘plab sonlar nazariyasining additiv muammolarini o‘z ichiga oladi.

Hozirgi vaqtda juda ko‘plab to‘la hal etilmagan sonlar nazariyasining additiv masalalari mavjud. Ularni shartli ravishda ikki guruhga natural sonlar qatnashgan va tub sonlar qatnashgan additiv masalalarga bo‘lish mumkin. Natural sonlar qatnashgan additiv masalalar markazida Waring muammosi, tub sonlar qatnashgan additiv masalalar markazida Goldbax muammosi yotadi. Quyida biz avvalo, shu ikki masalaning tarixiga qisqacha to‘xtalib o‘tamiz.

Waring muammosi. Fransuz matematigi J.L.Lagranj (Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813)) 1770 yilda quyidagi teoremasni isbotlaydi:”Har qanday natural sonni to‘rtta butun son kvadratlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin”. Bu teoremadagi tasdiq birinchi bo‘lib Diofantning “Arifmetika”sida keltirilgan. Uning isbotini Lagranj qilgan.

1770-yilda ingliz matematigi Waring (Edward Waring (1734-1798)) to‘rt kvadratlar yig‘indisi haqidagi J.L.Lagranj teoremasini umumlashtirishni taklif qildi va bu keyinchalik Waring muammosi deb nomlandi. Zamonaviy terminologiyada, buni quyidagicha ifodalash mumkin: soni uchun shunday natural son mavjudki, har bir natural son n, ta manfiy bo‘lmagan butun sonlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni n ni

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Berilgan uchun (3) tenglikni qanoatlantiruvchi chekli ning mavjudligi 1909-yilda nemis matematigi Gilbert (David Hilbert (1862-

1943)) tomonidan isbotlangan. Bu yerda berilgan ni (3) korinishida ifodalashlar soni uchun asimptotik formula olish bilan birga va funksiyalarning qiymatlarini aniqlash ham muhim hisoblanadi. Bunda va bilan mos ravishda va yetarlicha katta lar uchun (3) oʻrinli boʻlgan ning eng kichik qiymati belgilangan. Bu masalalar va ularning turli umumlashmalarini yechish bilan koʻp matematiklar shugʻullanishgan. Jumladan Hardi Litllvud, I.M.Vinogradov, G.Shinirelman, Y.Linnik, H.Montgomeri, R.Vaughan, A.A.Karatsuba, G.I. Arxipov, V.N. Chubarikov, D.A.Mitkin, I.Allakov va boshqalar muhim natijalarga erishganlar (bu boradadi toliq ma'lumotlarni[6] dan olish mumkin). Xususan ingliz matematiklari Xardi (Godfrey Harold Hardy (1877–1947)) va Littlvud (John Edensor Littlewood (1885 -1977)) oʻzlari yaratgan doiraviy usulni qoʻllab uchun asimptotik formula olishgan. Waring muammosi va u bilan bogʻliq masalalarda keying yillarda juda katta natijalarga erishilgan boʻlishiga qaramasdan, u bilan bogʻliq barcha masalalar hozirgacha toʻla hal etilgan emas.

Goldbax muammosi. Nemis matematigi Xristian Goldbax (Christian Goldbach(1690-1764)) nomi bilan yuritiladigan Goldbax muammosi birinchi marta 1742-yilda Goldbax va Shvetsariyalik nemis matematigi Eyler (Leonhard Euler 1707-1783) oʻrtasida yozishmalarda paydo boʻlgan. 1742-yilda Xristian Goldbax Leonard Eylerga yozgan xatida quyidagi taxminni aytadi: har bir 5 dan katta toq sonni 3 ta tub sonning yigʻindisi koʻrinishida ifodalash mumkin.

Eyler bu masala bilan qiziqib bundanda kuchliroq taxminni ilgari suradi: har bir 2 dan katta juft sonni 2 ta tub sonning yigʻindisi koʻrinishida ifodalash mumkin.

Birinchi tasdiq Goldbaxning ternar muammosi, ikkinchisi esa Goldbaxning binar muammosi

(yoki Eyler problemasi) deb ataladi.

7 million raqamdan iborat boʻlgan son boʻlgani uchun Vinogradov teoremasini undan kichik boʻlgan barcha sonlar uchun togʻridan togʻri tekshirib chiqish imkoniyati boʻlmagan

1930 yilda L.Shnirelman [7] har bir 1dan katta butun sonning ta tub sonning yigʻindisi koʻrinishida ifodalashini isbotladi. Bu natija keyinchalik bir necha marta yaxshilandi va 1995-yilda ekanligi isbotlandi.

Goldbaxning ternar muammosi boʻyicha quyidagi natijalar olindi: 1923 yilda Xardi va Litlvudlar hozirgacha isbotlanmagan Rimanning umumlashgan gipotezasini oʻrinli deb faraz qilib Goldbaxning ternar problemasining barcha yetarlicha katta toq sonlar uchun oʻrinli ekanligini koʻrsatdilar.

1937-yilda I.V.Vinogradov bu tasdiqning Riman gipotezasiga bogʻliq boʻlmagan isbotini berdi, ya'ni U yetarlicha katta toq sonlarni uchta tub sonning yigʻindisi koʻrinishi togʻrisida isbotlash mumkin ekanligini koʻrsatdi. K.Barozdin Vinogradovning yuqoridagi tasdigʻi uchun soni quyi chegara boʻlishini koʻrsatgan bu son deyarli 7 million raqamdan iborat boʻlgan son boʻlgani uchun Vinogradov teoremasini undan kichik boʻlgan barcha sonlar uchun togʻridan togʻri tekshirib chiqish imkoniyati boʻlmagan. Keyinchalik Vinogradovning natijasi bir necha marta yaxshilandi. 1989-yilda Van va Chenlar tomonidan Vinogradov teoremasi oʻrinli boʻlgan sonlarning quyi chegarasini deb olish mumkin ekanligini koʻrsatdi. Lekin bu son ham kata son boʻlib ungacha boʻlgan barcha sonlar uchun teoremaning to'g'riligini bevosita tekshirib chiqish imkoniyati yo'q edi. 1997-yilda Deshouillers, Effinger, TE Riele va Zinovievlar [8] Rimanning umumlashgan gipotezasidan Goldbaxning ternar muammosini o'rinli ekanligini isbotladilar. Ular teoremaning 1020 sonidan kata bo'lgan sonlar uchun isbotlagan bo'lib, ungacha bo'lgan sonlar uchun teoremaning o'rinli ekanligini tekshirib ko'rishni kompyuter orqali amalga oshirganlar. 2013-yilda asli kelib chiqishi Perulik bo'lgan hozirda Fransiyada yashovchi Harald A Helfgott [9] tomonidan Goldbaxning ternar muammosi uzil kesil hal etildi. Endi Goldbaxning binar muammosi bo'yicha olingan natijalarga to'xtalib o'tamiz. Shuni ham takidlash kerakki Goldbaxning binar muammosi o'z yechimida ancha uzoq. Vinogradovning mashhur ishlaridan keyin A.G.Chudakov, T.Esterman va Van-der Korpetlar 1938-yilda deyarli barcha juft sonlarning ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin ekanligini isbotladilar.

Agar biz oraliqdagi ikkita tub son ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lmagan sonlarning sonini bilan belgilasak, u holda yuqoridagi mualliflar tomonidan isbotlangan natijani ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda -Vinogradov simvoli, -haqiqiy son. 1961-yilda A.F.Lavrik [10] berilgan

juft sonini arifmetik progressiyadan olingan ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar soni uchun assimptotik formula oldi. Ushbu ishda shu asimptotik formulaning qoldiq hadi aniqlashtirilib va quyidagi teorema isbotlangan:

Teorema. oralig'idagi ko'pi bilan ta dan boshqa barcha juft sonlar uchun tenglamaning tub sonlar ; , tub sonlardagi yechimlari soni uchun quyidagi formulani isbotladi:

bu yerda p-barcha tub sonlarni qabul qiladi, Eyler funksiyasi, va lar musbat haqiqiy sonlar, -simvoldagi o'zgarmas son va ga bog'liq.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. -М. "Мир", 1975, -272с.
2. Dudek A.W. Explicit estimates in the theory prime numbers. Australian Nationat university. Arxiv: 1611.07251v1 [math.NT] 22 nov 2016, 105p.
3. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. -М. "Наука", 1975, -272с.
4. Oliver Ramare. Short intervals containing primes. The Time-EMT project 14th, 2017.
5. Аллаков И., Оценка тригометрических сумм и их приложения к решению некоторы аддитивных задач теории чисел. - Термиз, Сурхан нашр.2021, 160 с.
6. Аллаков И., О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". -Казань, 2000.-№ 8(459).-С.3-15.
7. Шнирельман Л.Г. Об аддитивных свойствах чисел // Изв. Донецкого политех инс-та. -Ростов-Дон, 1930, т. 14, №2-3,с.3-28.
8. Deshouillers J.M., Effinger G., TE Riele H., Zinoviev D. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis// Electronic research announcements of the American Matematical Society. 1997, v.3, p.99-104.
9. Harald A Helfgott, David J Platt. Numirical verification of the ternary Goldbach conjecture up to . // Experimental Mathematics, -2013, V. 22(4), p. 406-409
10. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М.Виноградова // Вестник ЛГУ.-Ленинград, 1961. -№13.-С. 11-27.